في الرياضيات

التمدد في منهاج الرياضيات الفلسطيني الجديد

سامر أبو صاع

أعرض هذه المشاركة التي تبحث في موضوع التمدد وهو أحد التحويلات الهندسية كما ورد في أربعة كتب رياضيات ضمن خطة المنهاج الفلسطيني الجديد. أعرضها وأنا في موقع المنفذ للمنهاج الجديد منذ أربع سنوات؛ أي منذ السنة التي بدأ فيها تطبيق المنهاج للصف السابع. مشاركتي تتضمن مجموعة من التساؤلات النابعة من واقع مواقف تعليمية، ورؤية متواضعة تحاول الإجابة عن بعض هذه التساؤلات. إنني آمل أن تشكّل هذه المشاركة إضافة في مجال الحوار التربوي الهادف من أجل تنمية الأفكار والمهارات التربوية والأدائية والإبداعية.

إن "التمدد" مصطلح يُصنّف في اللغة على أنّه مصدر وله مشتقاته التي لا تكاد جلسة حوار تخلو من أحدها، ويكفي "التمدد" أن ترد مشتقاته في آي الذكر الحكيم مرات عديدة، ففي قوله تعالى "إذا الأرض مُدّت"، "نمُدّ له من العذاب مدّا". وفي مجالات كثيرة، نجد لهذا المصدر حضوره: فمن التاريخ "أن لأبي حنيفة أن يمدّ رجليه". وفي مجال العلوم التطبيقية "الأجسام تتمدد بالحرارة وتتقلّص بالبرودة". ومن الحياة الدراسية "تقرّر تمديد الفصل الدراسي حتى تاريخ ...". ولسنا هنا بصدد سرد استخدامات هذا المصطلح، فالحديث يطول والمجال لا يتسع، ولكنها إشارات تبين مدى حضور وعمق هذا المصطلح الذي يستحق أن يعرض بصورة متواصلة، واضحة، متصاعدة في أربعة كتب هي كتاب الصف التاسع بجزئيه الأول والثاني، وكتاب الصف العاشر بجزأيه الأول والثاني.

سأقوم بتفصيل الموضوع حسب الورود في هذه الكتب:

كتاب الصف التاسع - الجزء الأول

عرض هذا الكتاب التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد، الدوران) بشكل سهل وواضح ومريح، عكسه التجاوب الكبير من قبل الطلبة الذين لمسوا، وبدرجة عالية، نتاجات جهود بذلوها أثناء دراسة هذه المواضيع، مستخدمين ما تيسر من وسائل ومشاهدات في غرفة الصف، ما أشاع جواً من الارتياح. أما بخصوص التمدد، فيجدر بنا أن نذكر صيغته حيث كانت:

(س، ص) ⟵ ك (س، ص) = (ك س، ك ص)؛ أي أنّ هذا التحويل قد أثّر على الإحداثين السيني والصادي.

كتاب الصف التاسع – الجزء الثاني

جاء موضوع التحويلات الهندسية كوسيلة لرسم منحنى الاقتران التربيعي تحت عنوان "حل المعادلات التربيعية بيانياً".

أولاً– "التمثيل البياني للاقتران التربيعي الذي مجاله ح": تحت هذا العنوان استخدم الكتاب التحويلات الهندسية في رسم منحنى الاقتران التربيعي، حيث بدأ بمناقشة الانسحاب عارضاً مثال (٣) يليه تعميم صفحة (٦٤) ثم مثال (٤) يليه تعميم صفحة (٦٥) مع غياب الحديث عن الانعكاس، ثم عرض مثال (٥) يليه تعميم صفحة (٦٦). بعد ذلك انتقل لمناقشة التمدد فعرض المثالين (٦، و٧) ولم يتبعهما بتعميم واكتفى بكتابة ملاحظة (١) صفحة (٦٧)، وهي "هذه الاقترانات هي تمدد للاقتران ق (س) = س^2 باتجاه محور الصادات".

وهنا تظهر مجموعة من التساؤلات:

١) ألا يحق لمثالين على موضوع التمدد أن يتبعهما تعميم؟
٢) لماذا لا يعرض الكتاب صيغة للتمدد باتجاه محور الصادات؟
٣) لماذا لا يكون التمدد باتجاه محور السينات؟!

ثانياً– "استخدام التمثيل البياني في حل المعادلة التربيعية": تحت هذا العنوان استخدم الكتاب الرسم البياني في دراسة مثال (١) صفحة ٦٧، ومثال(٢) صفحة ٦٨. نلاحظ ما يلي:

١. إنّ الكتاب استخدم الجبر في التوصّل إلى صيغة الانسحابات، ومنها يحدّد إحداثيات نقطة الرأس، والسؤال الآن هل إحداثيات نقطة الرأس تكفي لرسم منحنى الاقتران التربيعي؟
٢. تعتمد الأمثلة الرسم التقريبي في حل المعادلة المرافقة، والسؤال الآن ما هي الآلية المستخدمة في الرسم للحصول على حلول المعادلة وبهذه الدرجة من الدقة؟

ثالثاً– فيما يتعلّق بالتمارين والمسائل الواردة على الدرس: لنأخذ السؤال السادس صفحة (٦٨) باعتباره أحد الأسئلة الرئيسية في هذا الدرس، وهذا نصّه:

"اكتب الاقتران ق(س) = ٢س^2 – ٨س +١٠ على الصورة أ(س–م)^2 + ن، ثم ارسم ق(س) رسماً تقريبياً وأجد من الرسم إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وأصفار الاقتران، والمقطع من محور الصادات، ومدى الاقتران".

إن نظرة متأملة في نص السؤال تطرح علينا مجموعة من التساؤلات:

١. كيف سيستخدم الطالب التمدد في رسم منحنى ق دون الاعتماد على صيغة تيسّر له التحرّك على مستوى الرسم البياني مثلما حصل مع الانسحابات؟
٢. ما معنى أن يكون الرسم تقريبياً؟ هل هذا يعني أنّ أصفار الاقتران ستكون تقريبية، وكذلك الأمر بالنسبة للمقطع الصادي؟
٣. هل سيجد الطالب إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل ومدى الاقتران هندسياً من الرسم أم جبرياً من صيغة الانسحابات؟

رابعاً– رؤية تحاول الإجابة عن هذه التساؤلات:

١. اعتقد بضرورة التمييز بين الرسم البياني لمنحنى الاقتران التربيعي باستخدام التحويلات الهندسية وحل المعادلة التربيعية بيانياً، وأنّه لا داعي لهذا التداخل بين الموضوعين، وبخاصة فيما يتعلّق بالتمارين والمسائل الواردة على الموضوع، وأنّ عملية الفصل بين الموضوعين من شأنها أنّ تميّز طريقة الحل البياني عن باقي طرق الحل للمعادلة التربيعية.
٢. في الجانب التطبيقي، فإنّ رؤيتي في الإجابة عن هذه التساؤلات المبنية على ما قمت بتنفيذه مع الطلبة خلال العامين السابقين تتلخّص في توفير الرسم البياني الدقيق باستخدام البرامج الحاسوبية الجاهزة في مختبر الحاسوب؛ مثل (magic graph)، و(plot maestro)، أو توزيع ورق رسم بياني يتضمن رسماً دقيقاً لمنحنى ق (س) على الطلبة في غرفة الصف، وبناءً على ما لمسته من الطلبة، يمكنني القول إنّ هذا الإجراء ساهم في:

- إثراء النقاش.
- إيجاد مجال للإجابة عن عناصر السؤال.
- تجنّب الحديث عن التمدد.
- مكّن الطلبة من الربط بين صيغة الانسحابات والتمثيل البياني للاقتران التربيعي.
- رسّخ مفهوم صفر الاقتران (جذر المعادلة المناظرة)

لدى الطلبة مهما كان نوع الاقتران.

سأعود للحديث عن الاقتران التربيعي تحت تأثير التمدد فيما بعد.

كتاب الصف العاشر - الجزء الأول

جاءت التحويلات الهندسية في هذا الكتاب كوسيلة لرسم المنحنيات معتمداً واحداً من منحنيات الاقترانات الأصلية مثل الاقتران التربيعي والتكعيبي والجذور والقيمة المطلقة. إنّ الموضوع كان واضحاً ميسراً، بمعنى أنّ الطالب استطاع أن يلمس أثراً مباشراً لكل من الانسحاب والانعكاس والتمدد. وإذا أردنا الوقوف عند التمدد، فلا بد من الإشارة إلى ما هو جديد، والمتمثل في أنّه يؤثّر على الإحداثي الصادي فقط، بما سُمّيَ بالتمدد الرأسي (العمودي) وفق الصيغة:

أ ق (س)، أ < صفر: (س، ص) ⟵ (س، أ ص).

بمعنى أنّ الكتاب قدّ تخصّص في تناول الموضوع عندما بدأ يُصنّف التمدد تحت مسمى "التمدد العمودي"، وهنا يتمثّل المنحى التصاعدي في عملية العرض. ومن هنا يُثار التساؤل التالي: طالما أننا نتحدّث عن تمدد رأسي (عمودي) فلماذا لا يكون هناك تمدد أُفقي؟!

لكي نجد مجالاً للإجابة عن هذا التساؤل، ولكي يكون هناك تصاعد في عملية البناء، فلا بد من الانتقال إلى الجزء الثاني من كتاب الصف العاشر.

كتاب الصف العاشر - الجزء الثاني

إنّ من أهم ميزات التفكير الرياضي هو حضور الجانب المعاكس في القضايا المطروحة، فإذا تحدّثنا عن السالب، فمن الطبيعي التفكير في الموجب، وإذا كان هناك اختبار خط عمودي، فمن الوارد أن يكون هناك اختبار خط أُفقي، والبرهان غير المباشر له حضور كبير مثل البرهان المباشر، وإذا تحدّثنا عن الشرق فلا ننسى الغرب وإذا درسنا التمدد العمودي فمن البديهي أن يتبادر إلى أذهاننا "التمدد الأفقي"، ولتوضيح ذلك لا بد من الرجوع إلى صفحات الكتاب.

استخدم الكتاب التحويلات الهندسية للمساعدة في رسم الاقترانات الدورية (جاس، جتاس، ظاس)، وسأقصر الحديث هنا على مثال (٦) صفحة (٣١)، حيث فسّر الرسم البياني لمنحنى ص = ٣ جاس على أنّه تمدد عمودي لمنحنى ص = جاس، وهذا بلا شك يساعد في فهم الموضوع، وكذلك الأمر بالنسبة لمثال (٨) صفحة (٣٢).

لكن عند الوقوف على مثال (١٠) صفحة (٣٣) نجد هناك نقصاً في التفسير يتمثّل في عدم إدراج اسم التحويل الهندسي المستخدم في الشكل الذي يتضّمن رسماً لمنحنيي ص = جتاس، ص = جتا٣س.

ولكن كيف نستطيع تفسير هذا الرسم باستخدام التحويلات الهندسية؟

أولاً- سأستخدم الرسم البياني كما هو وارد في الشكلين التاليين اللذين يتضمن أولهما رسماً لمنحنيي ص = جتاس، ص = جتا٢س، وثانيهما رسماً لمنحنيي ص= جتاس، ص=جتا (٠,٥س). وعلينا أن نتمعّن الشكلين لكي نلاحظ ما يلي:

١) النقطة ب تقع على منحنى جتا٢س في الشكل الأول وعلى منحنى جتا (٠,٥س) في الشكل الثاني وفي الدورة الأولى لكل منهما.

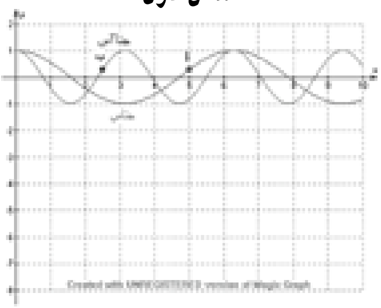
٢) النقطة أ تقع في الدورة الأولى لمنحنى جتاس في الشكلين.

٣) ب هي صورة أ وتقع في الدورة الأولى لمنحنى جتا٢س، جتا٥,٠س في الشكلين.

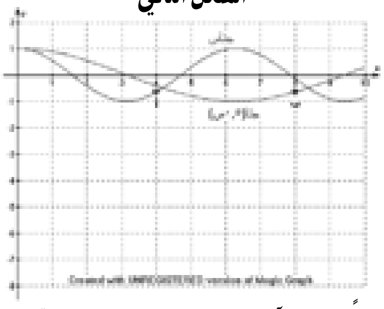
٤) الإحداثي الصادي للنقطة أ يساوي الإحداثي الصادي للنقطة ب.

٥) الإحداثي السيني للنقطة ب يساوي الإحداثي السيني للنقطة أ مقسوماً على معامل الزاوية.

الشكل الأول



الشكل الثاني



ثانياً- يمكن الآن تحديد النقاط الرئيسية حول "التمدد الأفقي" كما يلي:

- الصيغة العامة للاقتران الدوري هي ص = م جا(ك س + جـ) + د، ص= م جتا(ك س + جـ) + د.
- معامل التمدد الأفقي يعتمد على معامل الزاوية (ك).
- التمدد الأفقي يؤثّر على الإحداثي السيني، ولا يؤثّر على الإحداثي الصادي، وفق الصيغة:

أ(س ، ص) ⟵ ب (س÷ك، ص)

ثالثاً- الاقتران التربيعي تحت تأثير التمدد وفق الصيغة:

ق(س) ⟵ ك× ق(س)، ك < صفر.

فإذا أردنا تفسير التمدد الحاصل، يمكننا القول إنه تمدد عمودي يؤثّر على الإحداثي الصادي لمنحنى $س^2$ وفق الصيغة: (س ، ص) ⟵ ك(س،ص) = (س، ك ص).

أو يمكننا القول إنّه تمدد أفقي يؤثّر على الإحداثي السيني لمنحنى $س^2$ وفق الصيغة:

(س ، ص) ⟵ ك (س، ص) = (س ÷ $\sqrt{ك}$ ، ص).

مثال: ليكن ق(س) = $س^2$، ك = ٤، هـ(س) = ٤$س^2$، فيمكننا تفسير هـ (س) على أنّه تمدد عمودي لمنحنى ق(س) وفق الصيغة: (س، ص) ⟵ (س، ٤ص)، بمعنى أنّه إذا كانت النقطة (١٦،٤) تقع على منحنى ق فإنّ صورتها (٤، ٦٤) تقع على منحنى هـ.

أو تمدد أفقي لمنحنى ق(س) وفق الصيغة: (س، ص) ⟵ (س ÷ ٢، ص)، بمعنى أنّه إذا كانت النقطة (١٦،٤) تقع على منحنى ق، فإنّ صورتها (٢، ١٦) تقع على منحنى هـ.

الخلاصة

أولاً- تجدر الإشارة إلى أن مصطلح "التمدد الأفقي" بادر إلى ذكره أحد الطلبة في الصف العاشر دون أن ذكر لهم هذا المصطلح من قبل، وذلك نتيجة حوارات دارت أثناء تطبيقي مع الطلبة حصة في مختبر الحاسوب مستخدمين، البرامج الحاسوبية الجاهزة في مناقشة موضوع تأثير التحويلات الهندسية على الاقترانات الدورية. وهنا تظهر أهمية إعطاء الطلبة المجال للتعبير عن تساؤلاتهم وأفكارهم وتشجيعهم على المبادرة في إبداء آرائهم، وذلك باستخدام التكنولوجيا المتوفرة في المدرسة كوسيلة في تسهيل عملية التعليم والتعلّم.

ثانيا- إنّ المتتّبع لموضوع التمدد في المنهاج يلاحظ ما يلي:

١) التأسيس للموضوع في كتاب الصف التاسع/ الجزء الأول بطريقة واضحة.

٢) النقص في التفسير في كتاب الصف التاسع/ الجزء الثاني بطريقة أضفت نوعاً من الغموض.

٣) التخصيص للموضوع في كتاب الصف العاشر/ الجزء الأول تحت مسمى "التمدد الرأسي".

٤) النقص في التفسير في كتاب الصف العاشر/ الجزء الثاني بطريقة أظهرت فجوة في عملية البناء.

ثالثاً- يمكنني القول إنّ مادة التمدد تحتاج إلى منحى واضح، متصاعد ومتكامل في طريقة العرض وأن الحديث عن موضوع التمدد الأفقي يحقّق هذا المنحى ويُسهّل للمعلّم والطالب عملية البناء السليم التي تخلو من الفجوات والتخمينات وبالتالي من الإرباك.

أخيراً: لنتذكر عبارة سقراط الخالدة:

"إنّ الحياة التي لا تخضع للفحص والنقد، ليست جديرة بأن يحياها الإنسان".

سامر أبوصاع - مدرسة الأوقاف الشرعية / طولكرم